Απειροστικός ΙΙ (Σαρόγλου) 25/2/2019

<u>Κριτήριο σύγκλισης Cauchy</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει αν-αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n,m \geq n_0$, $m \geq n+1$, να ισχύει $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\right| < \varepsilon$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμός άρα είναι

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Από κριτήριο σύγκλισης Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall m,n \geq n_0$, $m \geq n+1$, να ισχύει $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\right| < \varepsilon$

Θέτω $S_{n,m} = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k$, το m-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$

τα μερικά αθροίσματα $< \varepsilon$

Έχω $|S_{n,m}| < \varepsilon$ $\forall m \geq n+1 \Rightarrow \left|\lim_{m\to\infty} S_{n,m}\right| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$

$$\left|\lim_{m\to\infty} S_{n,m}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k\right|$$

$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$

η ουρά της σειράς τείνει στο 0.

<u>Σειρές μη αρνητικών όρων</u>

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω ότι $\{\alpha_k\}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών

Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, τότε: Αν η $\{S_n\}$ είναι φραγμένη τότε

(1) η σειρά <u>συγκλίνει</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$

Αν η $\{S_n\}$ είναι μη φραγμένη τότε η σειρά (2) <u>αποκλίνει στο ∞</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$

<u>Απόδειξη</u> $S_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1} \le (a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n = S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

προσθέσαμε κάτι μη αρνητικό

$\Rightarrow \{S_n\}$ αύξουσα

<u>ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Αν η $\{S_n\}$ είναι φραγμένη, τότε η $\{S_n\}$ συγκλίνει κ' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ και αν $\{S_n\}$ είναι μη φραγμένη, τότε το όριο της $\lim S_n = +\infty$ κ' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

(άρα έχει λογ. αρμονική σειρά)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ② (SOS)!!! [ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ ΤΟΥ Cauchy]:</u> Έστω $\{a_k\}$ ↓ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

φθίνουσα

[redacted] <u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$. Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

$\overset{Θ1}{\Longrightarrow} \exists M > 0$ τ.ω $|t_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ όμως επειδή t_n είναι μη αρνητική $t_n \le M \Rightarrow 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n} \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Έχω $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n}$

$\underset{\text{φθίνουσα}}{\overset{\{a_n\}}{\le}} a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + a_{2^n}$

$\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \le$

η a_n είναι φθίνουσα
άρα $a_3 \le a_2 \quad a_5 \le a_4$
$a_6 \le a_4 \quad a_7 \le a_4$
$a_{2^{n-1}} \le a_{2^{n-1}}$
και $a_{2^n - 1} \le a_{2^{n-1}}$
$a_{2^n} \le 2 a_{2^n}$

$\le a_1 + t_n \le M + a_1$

άρα $S_{2^n} \le a_1 + M$ η $S_n \le S_{2^n}$ η ακολουθία είναι $\{S_n\}$ αύξουσα τω $(n \le 2^n, \forall n \in \mathbb{N})$ άρα $S_n \le M + a_1$

η $\{S_n\}$ είναι φραγμένη δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει $\overset{Θ1}{\Rightarrow} \exists M>0$ τω

$S_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}$

$t_n = 2\alpha_2 + \dots + 2^n \alpha_{2^n}$

$t_n = 0 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 + \dots + 2^n \alpha_{2^n}$

Το $0 \le 2\alpha_2$

Το $2\alpha_2 \le 2\alpha_2$ $\quad \{\alpha_n\}$

$4\alpha_4 = \alpha_4+\alpha_4+\alpha_4+\alpha_4 \underset{\text{φθίνουσα}}{\le} \alpha_3+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_4 = 2(\alpha_3+\alpha_4)$

$2^n\alpha_{2^n} = 2(2^{n-1}\alpha_{2^n})$

$= 2(\underbrace{\alpha_{2^n}+\dots+\alpha_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ φορές}})$

Το $\alpha_{2^n} \le \alpha_{2^{n-1}+1}$ άρα $2(\alpha_{2^n}+\dots+\alpha_{2^n}) \le 2(\alpha_{2^{n-1}+1}+\dots+\alpha_{2^n-1})$

⋮

$\alpha_{2^n} \le \alpha_{2^n-1}$

Το $t_n \le 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2(\alpha_3+\alpha_4)+\dots+2(\alpha_{2^{n-1}+1}+\dots+\alpha_{2^n-1})$

$= 2(\alpha_{2^{n-1}+1}+\dots+\alpha_{2^n-1}) = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\dots+\alpha_{2^n-1})$

$= 2S_{2^n-1} \le 2M \Rightarrow \{t_n\}$ φραγμένη

$\overset{Θ1}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \alpha_{2^k}$ συγκλίνει.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p>1$ (για $p=1$ είχαμε δείξει ότι αποκλίνει)

• Η ακολουθία $\frac{1}{k^p}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{1-p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{1-p}<1$, άρα συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει για $p>1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω ότι έχεις δύο ακολουθίες $0 \le \alpha_n \le \beta_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k$ (1) αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ αποκλίνει ($\nLeftarrow$)

αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει τότε $\Rightarrow$ και η $\sum_{k=1} \alpha_k$ συγκλίνει ($\nLeftarrow$)

Απόδειξη: (1) Έστω η $S_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $t_n = \beta_1 + \dots + \beta_k$

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει $\xRightarrow{\Theta.1.} \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \xRightarrow{S_n \le t_n} \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ αποκλίνει

Αν $p<1 \Rightarrow \frac{1}{k^p} \ge \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{αποκλίνει}]{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

αποκλίνει

Απόδειξη: ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ αποκλίνει για $0<p \le 1$ κάνοντας χρήση του θεωρήματος συμπύκνωσης του Cauchy: $\left\{\frac{1}{k^p}\right\}$ φθίνουσα, $\frac{1}{k^p} \ge 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{1-p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$$ αποκλίνει επειδή

το $2^{1-p} \ge 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, $p>0$

$\overset{\text{V}_1}{0}$

Το $k+1 \ge k \Rightarrow \log(k+1) \ge \log k \Rightarrow \log(k+1)^p \ge (\log k)^p$
$\Rightarrow (k+1)(\log(k+1))^p \ge k(\log k)^p$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)[\log(k+1)]^p} \le \frac{1}{k(\log k)^p} \Rightarrow \left\{\frac{1}{k(\log k)^p}\right\}$$ φθίνουσα

αφου φθινουσα και μη αρνητική χρησ. κρτ. συμπυκνωσης του Cauchy.

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^p}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k} k^p(\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p}$$

συγκλίνει για $p>1$, αποκλίνει για $0<p\leq 1$

<u>Ο αριθμος e:</u> $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

<u>Απόδειξη:</u> $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} 1^k\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k}$

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$$!!!

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot 2\cdots(n-k)\cdots n}{k!(1\cdot 2\cdots n-k)}\frac{1}{n^{n-k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\overbrace{\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n\cdot n\cdots n}}^{\leq 1} \leq$$

ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος απο τον αριθμητή

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Παιρνοντας όρια: $e \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n\cdot n\cdots n}}$$

Εστω $m \in \mathbb{N}$ και εστω $n \ge m$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{\boxed{(n-k+1)}\boxed{(n-k+2)}\cdots n}{\boxed{n}\cdot\boxed{n}\cdots n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{0}{n}\right)$$

$$\ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{0}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

Εαν το $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

$\Rightarrow e \ge \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}}_{= S_m}$, $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \{S_m\}$ φραγμένη $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει

και $\le e$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Ο e είναι άρρητος

Αποδειξη ΠΡΟΤΑΣΗΣ (2): Εστω οτι είναι $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ τω

$e = \frac{\alpha}{\beta}$. Διαλεγω $m > \beta$ $(m \in \mathbb{N})$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) m! + \frac{\alpha}{\beta} m! \in \mathbb{N}$

$\frac{m!}{k!} = \frac{1\cdot 2\cdots k(k+1)\cdots m}{1 2\cdots k} = k(k+1)\cdots m \in \mathbb{N}$ $\frac{m!}{\beta} = \frac{1\cdot 2\cdots \beta(\beta+1)\cdots m}{\beta} \in \mathbb{N}$

$$m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} < m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = m!\,\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\overbrace{\boxed{\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{=e}\, m! - m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}}}^{\in \mathbb{N}} = m!\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\right) = m!\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$= m!\left(\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \dots +\right)$$

$$= \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots +\right) \leq$$

$$\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m+1}$$

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \leq \frac{1}{(m+1)^2}$$

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)^2} < \frac{1}{(m+2)^2}$$

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \leq \frac{1}{(m+3)^2}$$

$$\leq \frac{1}{m+1} + \left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \frac{1}{(m+3)^2} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{m+1} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

<u>Δηλαδή</u> $0 \leq \frac{\alpha}{\beta}\, m! - m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m+1} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\, m! - m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

Άτοπο, επειδή $\frac{\alpha}{\beta}\, m! - m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq \beta$

Απόλυτη σύγκλιση: Αν $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει τότε λέμε ότι

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ Σύγκλιση